AnW – Woche 4

16.03.23
Nicolas Wehrli

Heute:

I. Minitest
II. Kommentare zur letzten Serie
III. Theory Recap
  - Hopcroft & Karp
  - Färbung
  - Wahrscheinlichkeit
    - Bemerkungen und Konventionen
    - Bedingte Wahrscheinlichkeit (Bayes)
    - Unabhängigkeit
    - Zufallsvariablen

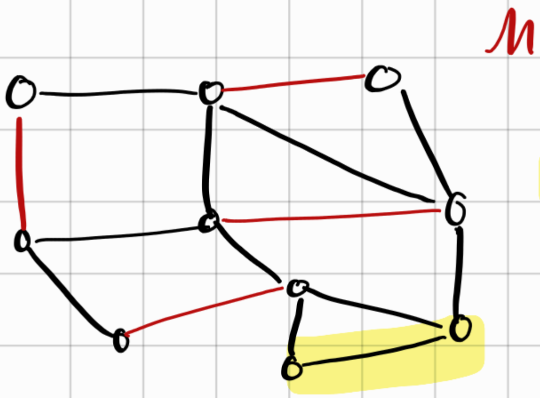
I. Minitest

Passwort: velocity

Sei M ein Matching in einem Graphen G. Dann gilt für jeden M-Augmentierenden Pfad P dass er Länge mindestens $|M|/2$ hat.

Bitte wählen Sie eine Antwort:

- Wahr ○
- Falsch ☒

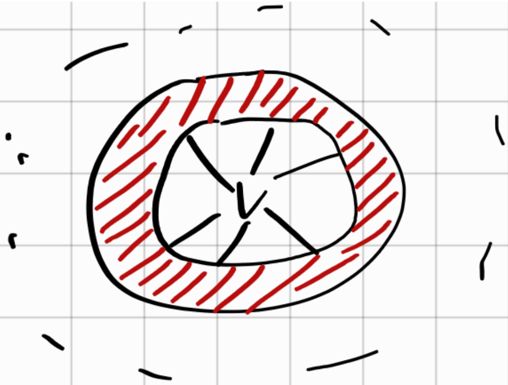


augmentierender Pfad

Sei G ein 3-färbbarer Graph. Dann können wir für jeden Knoten $v \in V$ den induzierten Graphen auf der Nachbarschaft von v, $G[N(v)]$, mit zwei Farben färben.

Bitte wählen Sie eine Antwort:

- Wahr ☒
- Falsch ○



$G[N(v)]$

Da G 3-färbbar, existiert eine Färbung von

$G[N(v) \cup \{v\}]$ mit 3 Farben.

Wenn wir nun $\{v\}$ eine Farbe (o.B.d.A. 1) geben, kann kein w in $G[N(v)]$ diese Farbe haben, da die

Kante $\{v,w\}$ existiert.

$\Rightarrow$ muss $G[N(v)]$ 2-färbbar sein.

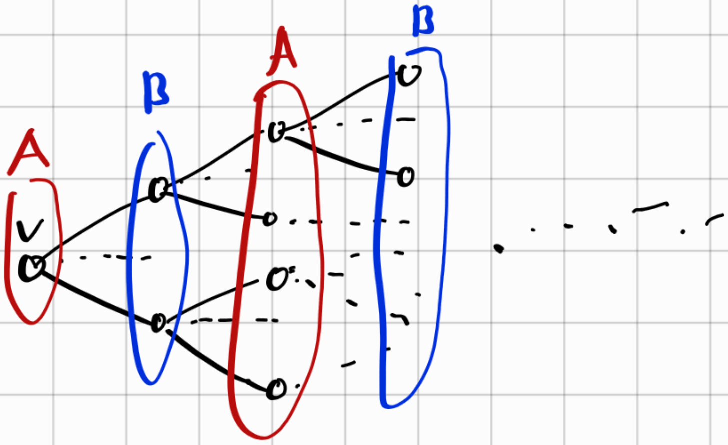
Jeder Baum ist bipartit.

Bitte wählen Sie eine Antwort:

- [x] Wahr
- [ ] Falsch

Baum ist ein kreisfreier zsh. Graph.

Sei $v \in V$ ein beliebiger Knoten im Graph. Mit einem BFS von v aus, können wir ohne weiteres die 2 disjunkten Teilmengen $A \uplus B = V$ finden.



BFS-Baum

Da G kreisfrei ist, existiert keine Kante innerhalb von A (resp. B). (Sonst Widerspruch).

Sei G ein vollständiger Graph mit einer Gewichtsfunktion auf den Kanten, sodass das Gewicht jeder Kante mindestens 1 ist. Angenommen, dass eine optimale TSP-Route in G Kosten 10 hat.

Geben Sie eine bestmögliche obere Schranke auf die Kosten eines minimalen Spannbaums in G.

$\forall e \in E \quad \ell(e) \geq 1.$

Da die TSP-Route ein Kreis ist, können wir mind. 1 Kante entfernen.

$\Longrightarrow$ Sei T der MST: $\ell(T) \leq 10 - 1 = \underline{\underline{9}}$

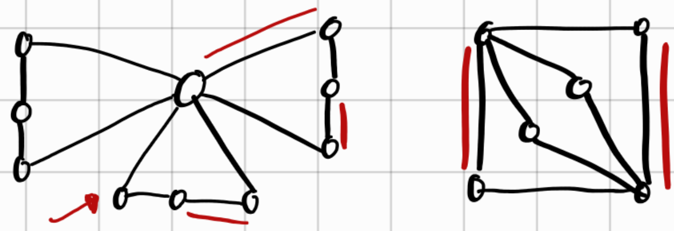
Angenommen, G ist ein Graph, der eine Eulertour enthält, und die Anzahl Knoten von G ist gerade. Dann enthält G ein perfektes Matching.

Bitte wählen Sie eine Antwort:

Wahr

Falsch

Gegenbeispiel:



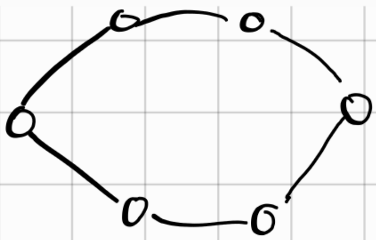
Der Satz von Dirac impliziert, dass Graphen, welche einen Knoten mit weniger als $\frac{n}{2}$ Nachbarn besitzen, keinen Hamiltonkreis haben.

Bitte wählen Sie eine Antwort:

Wahr

Falsch

Gegenbeispiel:



Jeder Graph auf n Knoten ist n-färbbar.

Bitte wählen Sie eine Antwort:

Wahr

Falsch

Wir geben jedem Knoten eine eigene Farbe.

Sei T ein Spannbaum in G. Sei $e \in E$ eine Kante, die nicht in T enthalten ist. Dann ist e keine Brücke.

Bitte wählen Sie eine Antwort:

Wahr ✗

Falsch

Sei $G = (V, E)$ und $e \in E$ eine Brücke.

$\Rightarrow G' = (V, E \setminus \{e\})$ nicht zsh.

Da aber $e \notin T$ existiert in G' der Spannbaum T ebenfalls.

↯ Widerspruch

Für einen bipartiten Graphen $G = (A \uplus B, E)$ gilt genau dann $|N(X)| \geq |X|$ für alle $X \subseteq A$, wenn es ein Matching M der Kardinalität $|M| = |A|$ gibt.

Bitte wählen Sie eine Antwort:

Wahr ✓

Falsch

Satz: (Hall, Heiratssatz)

Ein bipartiter graph G=(A⊎B, E) enthält ein Matching M der Kardinalität |M|=|A| gdw

$\forall X \subseteq A : |X| \leq |N(X)|$

Für das metrische TSP-Problem gibt es einen 2-Approximationsalgorithmus, aber keinen 4-Approximationsalgorithmus

Bitte wählen Sie eine Antwort:

Wahr

Falsch

Ein k-Approx.algorithmus gibt eine maximal k-mal schlechtere Lösung als das Optimum.

Da eine maximal 2-mal schlechtere Lösung auch maximal 4-mal schlechter ist, ist die Aussage falsch.

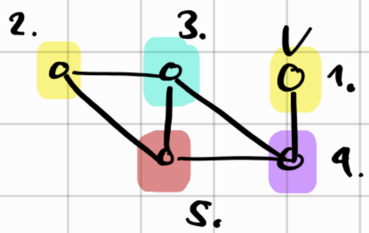
Sei G ein zusammenhängender Graph, und sei v ein Knoten in G mit $deg(v) < \Delta(G)$.

Der Greedy-Colouring Algorithmus benötigt höchstens $\Delta(G)$ Farben um G zu färben, wenn er für eine Knotenreihenfolge angewendet wird, in der v als **erstes** gefärbt wird. Bitte wählen Sie eine Antwort:

Wahr

Falsch

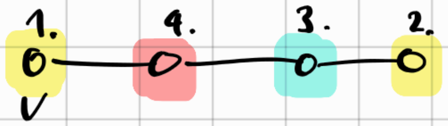
Gegenbeispiel:



$\Delta G = 3$

but we use 4 colors if the Greedy Algo. uses the given Sequence of vertices (starting with v s.t. $deg(v) < \Delta G$)

(Easier counter example

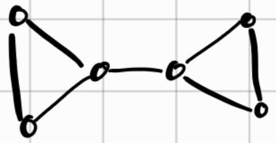


)

II. Kommentare zur letzten Serie

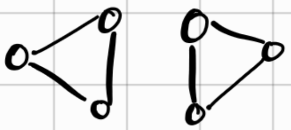
- Generell gut gelöst

- min. Grad $\delta(G) \geq 2 \not\Rightarrow$ 2-kanten-zsh.

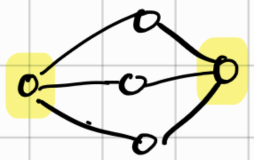


Die andere Richtung gilt aber. (Siehe Notizen 1. Woche)

- Alle deg. gerade und G zsh. $\Rightarrow \exists$ Eulertour

Sonst  (alle deg gerade)

- Kurze Erklärung bei Gegenbeispielen:



Dieser Graph ist 2-kanten-zsh.

aber die markierten Knoten haben ungeraden degree.

- Vermeidet "Statement Proofs":

Bsp. Aus $\deg(v)$ gerade $\forall v \in V$
und G zsh. folgt

G ist 2-kanten-zsh.

Dies stimmt, aber in dieser Form ist es einfach eine Behauptung ("Statement").

III. Theory Recap – Hopcroft & Karp

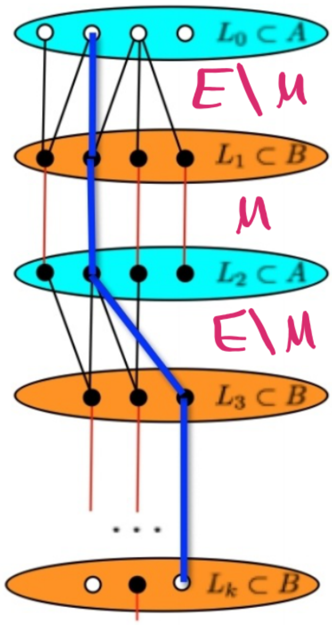
Erinnert euch an den simplen BFS Algo:

BFS für alternierende Pfade:
Input: bipartiter Graph $G = (A \uplus B, E)$, Matching M
Output: (kürzester) augmentierender Pfad,
falls solche Pfade existieren

L_0 := {unüberdeckten Knoten aus A}
Markiere Knoten aus L_0 als besucht.

for i = 1 **to** n = |A|
 if i ungerade **then**
  L_i := {unbesuchte Nachbarn von L_{i-1}
   via Kanten in $\boxed{E \setminus M}$}
 else (falls i gerade)
  L_i := {unbesuchte Nachbarn von L_{i-1}
   via Kanten in $\boxed{M}$}
 Markiere Knoten aus L_i als besucht.

$\boxed{\textbf{if } \text{ein Knoten } v \text{ in } L_i \text{ ist nicht überdeckt } \textbf{then return } \text{Pfad zu } v \text{ (backtracking)}}$



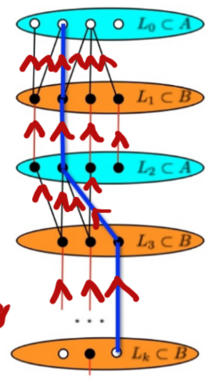
kann nur sein, falls i ungerade

Wir geben nur 1 Pfad zurück!

Sei: L_k die erste Menge mit unüberdeckten Knoten (mit $k \geq 1$).

$\Longrightarrow$ Wir haben potenziell mehrere $\boxed{\text{disjunkte}}$ augmentierende Pfade gefunden.

Wie finden wir diese?



Betrachte den gerichteten Graphen mit Kanten von $L_i \to L_{i-1}$

Multiple-Paths backtracking

$S \leftarrow \emptyset$

Für $v \in L_k$:

DFS-suche von L_v bis $u \in L_0$ erreicht wird.

$S \leftarrow$ 'u-v Pfad' $\cup S$ (falls $u \in L_0$ gefunden)

Lösche alle Knoten und Kanten die besucht wurden.

↳ trotzdem nur $O(|V|+|E|)$

- Alle Pfade in S haben dieselbe minimale Länge k (d.h. k ist die Länge eines kürzesten augmentierenden Pfades).
- Alle Pfade in S sind paarweise disjunkt. (*)
- S ist inklusionsmaximal mit dieser Eigenschaft, d.h. es lässt sich kein weiterer augmentierender Pfad der Länge k zu S hinzufügen, ohne die zweite Bedingung zu verletzen.

(*) $\Rightarrow$ for all $P \in S$:
$M = M \oplus P$

Satz 1.49. Der Algorithmus von Hopcroft und Karp durchläuft die while-Schleife nur $O(\sqrt{|V|})$ Mal. Er berechnet daher ein maximales Matching in einem bipartiten Graphen in Zeit $O(\sqrt{|V|} \cdot (|V| + |E|))$.

Finden der L_i und Backtracking geht jeweils in $O(|V|+|E|)$

Jetzt müssen wir nur noch beweisen, dass $O(\sqrt{|V|})$ iterationen genügen.

Claim I_0

Sei: P ein kürzester augmentierender Pfad von M,
und P' ein augmentierender Pfad von $M \oplus P$.
Dann gilt
$$|P'| \geq |P| + 2|P \cap P'| .$$

Proof I:

Sei: $\tilde{M} = M \oplus P \oplus P'$. Dann $|\tilde{M}| = |M| + 2$.

Betrachte $X := \tilde{M} \oplus M$.

Dann $|M \oplus \underset{\text{augmenting Paths}}{\tilde{X}}| = |M \oplus \tilde{M} \oplus M| = |M \oplus M \oplus \tilde{M}| = |\tilde{M}| = |M| + 2$

$\Rightarrow$ X enthält zwei disjunkte M-augmentierende Pfade.

Da P ein kürzester M-augmentierender Pfad ist,
folgt $|X| \geq 2|P|$

$$|X| = |M \oplus \tilde{M}| = |M \oplus M \oplus P \oplus P'| = |P \oplus P'|$$

$$|X| = |P \oplus P'| = |P \cup P'| - |P \cap P'|$$
$$= |P| + |P'| - 2|P \cap P'| \geq 2|P|$$

$$\Longleftrightarrow \quad |P'| \geq |P| + 2|P \cap P'|$$

$\boxtimes$

Claim II.

Sei S die Menge von disjunkten kürzesten augmentierenden Pfaden von M (durch Backtracking von L_k).

$\forall P \in S: |P| = k.$

Sei $\tilde{M}$ das Matching, nachdem wir M mit allen Pfaden $P \in S$ augmentiert haben.

Ein kürzester augmentierende Pfad $\tilde{P}$ von $\tilde{M}$ hat Länge $|\tilde{P}| \geq k+2$.

Proof II:

Case Distinction

1. $\tilde{P}$ disjunkt zu allen Pfaden in S

Da S inklusionsmaximal $\Rightarrow |\tilde{P}| \neq k$ (sonst $\tilde{P} \in S$)

$\Rightarrow |\tilde{P}| \geq k+1$

augmentierende Pfade haben ungerade Länge

$\Rightarrow |\tilde{P}| \geq k+2$

2. $\tilde{P}$ schneidet sich mit einem Pfad $P \in S$ in mind. 1 Knoten

Sei $v \in V$ dieser Knoten.

$\exists$ Kante $e \in P$: $e \in \tilde{M} \wedge e$ inzident zu v.

(da $\tilde{M}$ durch Augmentation mit P enstanden ist.)

da $\tilde{M} \oplus \tilde{P}$ ein Matching ist, und $\tilde{P}$ v überdeckt, muss $e \in \tilde{P}$. Sonst hat v im Matching $\tilde{M} \oplus \tilde{P}$ zwei inzidente Kanten ↯

$$\Rightarrow e \in \tilde{P} \cap P \Rightarrow \tilde{P} \cap P \neq \emptyset \qquad (1)$$

Sei: M' das Matching durch die Augmentierung von M durch alle Pfade in $S \setminus \{P\}$.

Dann per I_0 folgt

$$|\tilde{P}| \geq |P| + 2|P \cap \tilde{P}|$$

$$= k + 2|P \cap \tilde{P}|$$

$$\geq k + 2 \cdot 1 = k+2 \qquad (1)$$

Claim III_0

Sei M ein Matching mit kürzestem augmentierendem Pfad der Länge k.
Sei M' ein beliebiges anderes Matching.

$$|M'| \leq |M| + \frac{|V|}{k+1}$$

Proof III.

Case Distinction

Case $|M'| \leq |M|$

...

Case $|M'| > |M|$:

$X = M \oplus M'$ besitzt $|M'| - |M|$ disjunkte M-augmentierende Pfade.

Jeder Pfad hat mindestens $k+1$ Knoten.

X hat also mindestens $(|M'| - |M|)(k+1)$ Knoten.

$$(|M'| - |M|)(k+1) \leq |V|$$

$$\Leftrightarrow \quad |M'| \leq |M| + \frac{|V|}{k+1}$$

$\boxtimes$

Aus II_0 folgt, dass nach $\frac{\lceil\sqrt{|V|}\,\rceil}{2}$ iterationen

$k \geq \sqrt{|V|}$.

Für das M nach diesen ersten $\frac{\lceil\sqrt{|V|}\,\rceil}{2}$ iterationen

gilt für alle M' (insbesondere M_{max})

$$|M'| \leq |M| + \frac{|V|}{k+1} \leq |M| + \sqrt{|V|}$$

$\Rightarrow$ maximal noch $\sqrt{|V|}$ Iterationen.

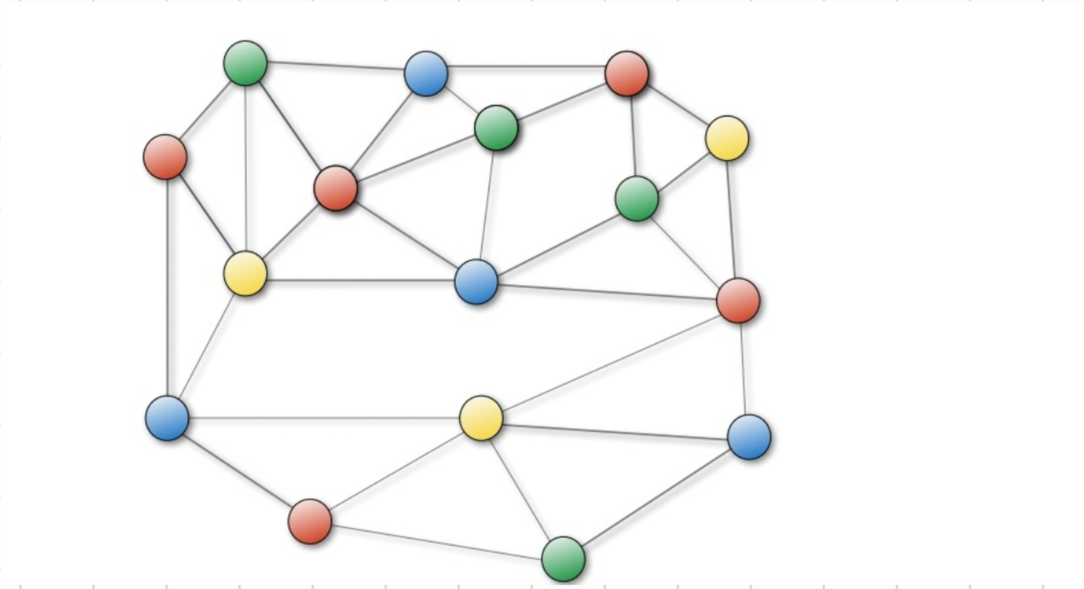
$\boxtimes$

Färbung

Definition 1.56. Eine *(Knoten-)Färbung* (engl. *(vertex) colouring*) eines Graphen $G = (V, E)$ mit k Farben ist eine Abbildung $c\colon V \to [k]$, sodass gilt

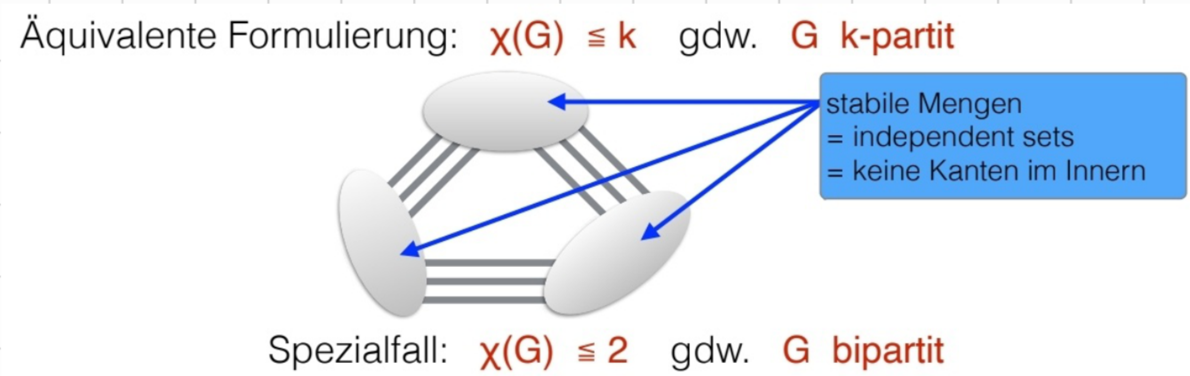
$$c(u) \neq c(v) \quad \text{für alle Kanten } \{u, v\} \in E.$$

Bsp.



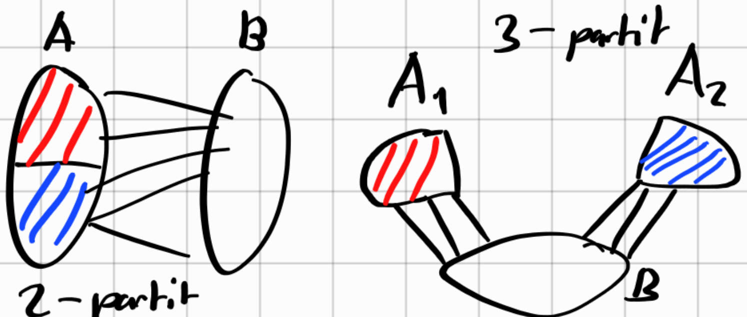
Die *chromatische Zahl* (engl. *chromatic number*) $\chi(G)$ ist die minimale Anzahl Farben, die für eine Knotenfärbung von G benötigt wird.

Alternativ:



Bmk: k-partit $\implies$ $k+1$ partit

Bsp.: bipartit



Satz: Für jedes $k \geq 3$ ist das Problem

„Gegeben ein Graph $G = (V, E)$, gilt $\chi(G) \leq k$?“

NP-vollständig.

Alternativen?

Exponentieller Algorithmus?	**Ja**, mit Inklusion/Exklusion. (Polynomieller Speicher und Zeit $O(2.2^n)$)
Approximationen?	**Nein.** Für jedes $\varepsilon > 0$ ist es NP-schwer, eine $n^{1-\varepsilon}$-Approximation zu finden.
Spezialfälle?	**Ja.** Wir werden einige Arten von Graphen sehen, für die es gute Algorithmen gibt.

Satz 1.59 (Vierfarbensatz). Jede Landkarte lässt sich mit vier Farben färben.

Versuchen wir's mal zu lösen:

GREEDY-FÄRBUNG (G)

1: wähle eine beliebige Reihenfolge der Knoten: $V = \{v_1, \ldots, v_n\}$
2: $c[v_1] \leftarrow 1$
3: **for** $i = 2$ **to** $i = n$ **do**
4: $\quad c[v_i] \leftarrow \min\{k \in \mathbb{N} \mid k \neq c(u)$ für alle $u \in N(v_i) \cap \{v_1, \ldots, v_{i-1}\}\}$

Satz 1.60. Sei G ein zusammenhängender Graph. Für die Anzahl Farben $C(G)$, die der Algorithmus GREEDY-FÄRBUNG benötigt, um die Knoten des Graphen G zu färben, gilt

$$\chi(G) \leq C(G) \leq \Delta(G) + 1.$$

Ist der Graph als Adjazenzliste gespeichert, findet der Algorithmus die Färbung in Zeit $O(|E|)$.

Sei x der Knoten mit $\deg(x) = \Delta(G)$.

Im schlimmsten Fall sind alle Nachbarn schon gefärbt, wenn wir x färben wollen.

Beobachtung:
Gilt für die (gewählte) Reihenfolge $|N(v_i) \cap \{v_1, \ldots, v_{i-1}\}| \leq k \quad \forall\, 2 \leq i \leq n$,
dann benötigt der Greedy-Algorithmus höchstens **k+1** viele Farben.

Heuristik:
v_n := Knoten vom kleinsten Grad. Lösche v_n.
v_{n-1} := Knoten vom kleinsten Grad im Restgraph. Lösche v_{n-1}. Iteriere.

Falls G=(V,E) erfüllt:
In jedem Subgraphen gibt es einen Knoten mit Grad $\leq k$
⇒ Heuristik liefert Reihenfolge $v_1, \ldots, v_n$ für die der Greedy-Algorithmus höchstens $k+1$ Farben benötigt

Satz: Einen 3-färbbaren Graphen kann man in Zeit $O(|V|+|E|)$ mit $O(\sqrt{|V|})$ Farben färben.

Algorithmus:
While es gibt Knoten v, der $> \sqrt{|V|}$ ungefärbte Nachbarn hat:
Färbe v mit neuer Farbe und seine Nachbarn mit 2 weiteren neuen Farben.
Lösche alle gefärbten Knoten. Der Restgraph hat Maximalgrad $\Delta \leq \sqrt{|V|}$
Färbe verbleibende Knoten mit Greedy-Algorithmus mit $\Delta + 1$ neuen Farben.

Satz 1.64 (Satz von Brooks). Ist $G = (V, E)$ ein zusammenhängender Graph, der weder vollständig ist noch ein ungerader Kreis ist, also $G \neq K_n$ und $G \neq C_{2n+1}$, so gilt

$$\chi(G) \leq \Delta(G)$$

und es gibt einen Algorithmus, der die Knoten des Graphen in Zeit $O(|E|)$ mit $\Delta(G)$ Farben färbt.

Wahrscheinlichkeit

Es gibt 2 Versionen der Siebformel im Skript:

Satz 1.35, der nur Aussagen über die Kardinalität einer Vereinigung $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$ macht.

Satz 2.5: Aussage über die Wahrscheinlichkeits-verteilung von $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$.

Aus 2.5 folgt 1.35 mit einem Laplace-Modell.
$\left(\text{i.e. } Pr[E] = \frac{|E|}{|\Omega|}, \forall E \subseteq \Omega\right)$

Grundsätzlich ordnet $Pr[\cdot]$ jeden Ereignis eine reelle Zahl zu.

In klassischer W'keitstheorie (4. Semester), werdet ihr sehen, dass $Pr = \mathbb{P}$ eine Funktion

$\mathbb{P}: \mathcal{F} \to \mathbb{R}$ ist,

wobei $\mathcal{F} \subseteq \underbrace{\mathcal{P}(\Omega)}_{\text{Powerset}}$ und 3 Bedingungen (Axiome von Kolmogorov) erfüllt. (und $\mathbb{P}$ ebenfalls gewisse Bed. erfüllt)

Für diese Vorlesung nicht weiter wichtig, Nehmt einfach die Def. 2.1 aus dem Skript.

Nicht relevant für die Prüfung

Definition 2.1. Ein *diskreter Wahrscheinlichkeitsraum* ist bestimmt durch eine *Ergebnismenge* $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots\}$ von *Elementarereignissen*. Jedem Elementarereignis ω_i ist eine *(Elementar-)Wahrscheinlichkeit* $\Pr[\omega_i]$ zugeordnet, wobei wir fordern, dass $0 \leq \Pr[\omega_i] \leq 1$ und

$$\sum_{\omega \in \Omega} \Pr[\omega] = 1.$$

Eine Menge $E \subseteq \Omega$ heisst *Ereignis*. Die Wahrscheinlichkeit $\Pr[E]$ eines Ereignisses ist definiert durch

$$\Pr[E] := \sum_{\omega \in E} \Pr[\omega].$$

Ist E ein Ereignis, so bezeichnen wir mit $\bar{E} := \Omega \setminus E$ das *Komplementärereignis* zu E.

In dieser Vorlesung ist Ω meistens endlich, sonst abzählbar unendlich. (Bei überabzählbaren Mengen treten Schwierigkeiten auf, die in dieser Vorlesung nicht behandelt werden.)

Bmk: Die vollständige (mathematische) Beschreibung eines W'keitraumes ist bei den meisten Anwendungen recht umständlich und kompliziert.

Bsp. Kartenspiel wo zwei Spieler je 5 Karten erhalten.

$$\begin{aligned}\Omega \;:=\; & \{(X, Y) \mid X, Y \subseteq C,\ X \cap Y = \emptyset,\ |X| = |Y| = 5, \\ & \text{wobei } C = \{\clubsuit, \spadesuit, \heartsuit, \diamondsuit\} \times \{2, 3, \ldots, 9, 10, B, D, K, A\}\}.\end{aligned}$$

Da eine solch explizite Darstellung mühsam sein kann, verzichtet man häufig darauf.
Allerdings sollte stets klar sein, wie eine solche Darstellung

im Prinzip auszusehen hätte.

Ähnlich wie bei Ω können wir auch ein Ereignis informell (aber eindeutig) definieren.

Bsp. $E :=$ „Spieler 1 hat 4 Asse"

anstatt $$E := \{(X, Y) \in \Omega \mid X = \{(f_1, w_1), \ldots, (f_5, w_5)\} \text{ und } w_1 = \ldots = w_4 = A\}.$$

Diese informelle Schreibweise können wir auch wie folgt verwenden:

$$\Pr[\underbrace{\text{„Spieler 1 hat 4 Asse"}}_{\text{Platzhalter für die Menge } E}]$$

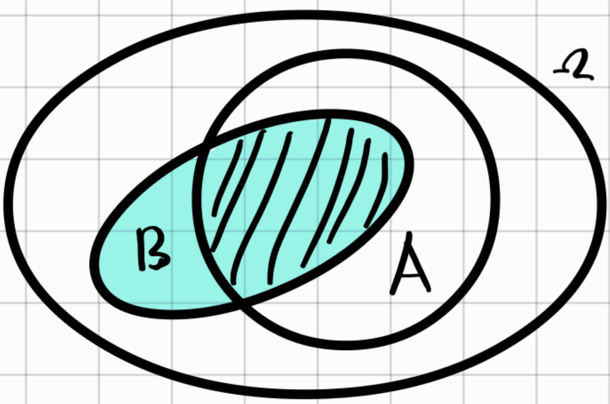
Bedingte Wahrscheinlichkeit

Intuitiv: Zusätzliche Informationen können die Wahrscheinlichkeiten verändern!

Definition 2.8. A und B seien Ereignisse mit $\Pr[B] > 0$. Die *bedingte Wahrscheinlichkeit* $\Pr[A|B]$ von A gegeben B ist definiert durch

$$\Pr[A|B] := \frac{\Pr[A \cap B]}{\Pr[B]}.$$

mögliche Ereignisse eingeschränkt auf B.



⇝ 'Welcher Anteil davon ist auch in A?'

$\Longrightarrow \Pr[A|B]$

Bmk: $\Pr[B|B] = 1, \quad \Pr[B|\overline{B}] = 0$

$\Pr[A|\Omega] = \Pr[A]$

Häufig betrachtet man Def 2.8 in einer anderen Form:

$$\Pr[A \cap B] = \Pr[B|A] \cdot \Pr[A] = \Pr[A|B] \cdot \Pr[B]. \tag{2.1}$$

Dann darf $\Pr[B] \geq 0$ sein. (bzw. $\Pr[A] \geq 0$)

Nun können wir dies n-mal erweitern und erhalten

Satz 2.10. *(Multiplikationssatz)* Seien die Ereignisse $A_1, \dots, A_n$ gegeben. Falls $\Pr[A_1 \cap \dots \cap A_n] > 0$ ist, gilt

$$\Pr[A_1 \cap \dots \cap A_n] = \Pr[A_1] \cdot \Pr[A_2|A_1] \cdot \Pr[A_3|A_1 \cap A_2] \cdots \Pr[A_n|A_1 \cap \dots \cap A_{n-1}].$$

Von (2.1) können wir auch folgendes schlussfolgern.

Satz 2.13. *(Satz von der totalen Wahrscheinlichkeit)* Die Ereignisse (1) $A_1, \dots, A_n$ seien paarweise disjunkt und es gelte $B \subseteq A_1 \cup \dots \cup A_n$. (2) Dann folgt

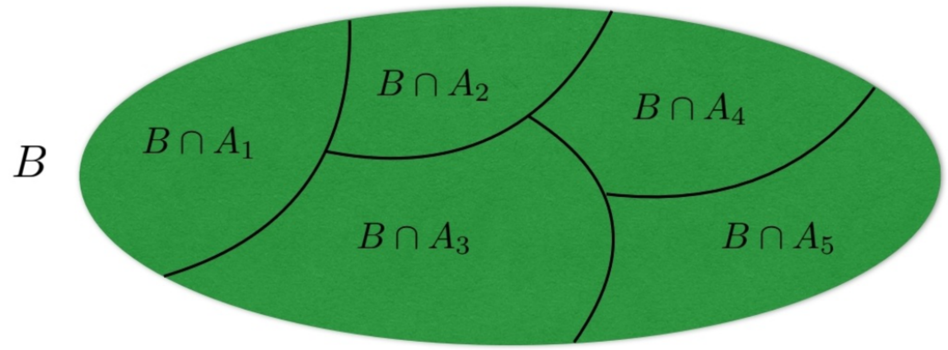
$$\Pr[B] = \sum_{i=1}^{n} \Pr[B|A_i] \cdot \Pr[A_i].$$

(Analog gilt für paarweise disjunkte Ereignisse $A_1, A_2, \dots$ mit $B \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$, dass

$$\Pr[B] = \sum_{i=1}^{\infty} \Pr[B|A_i] \cdot \Pr[A_i].)$$

Aus (1) folgt $A_1 \cap B, A_2 \cap B, \dots, A_n \cap B$ paarweise disjunkt.

Aus (2) folgt $B = \bigcup_{i=1}^{n} (A_i \cap B)$



$$\Longrightarrow \Pr[B] = \sum_{i=1}^{n} \Pr[A_i \cap B] \qquad \text{(Additionssatz)}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \Pr[B \mid A_i] \cdot \Pr[A_i] \qquad (2.1)$$

$\boxtimes$

Zur Erinnerung:

Satz 2.3 (Additionssatz). Wenn die Ereignisse $A_1, \ldots, A_n$ paarweise disjunkt sind (also wenn für alle Paare $i \neq j$ gilt, dass $A_i \cap A_j = \emptyset$), so gilt

$$\Pr\left[\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right] = \sum_{i=1}^{n} \Pr[A_i].$$

(Für eine unendliche Menge von disjunkten Ereignissen $A_1, A_2, \ldots$ gilt analog

$$\Pr\left[\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right] = \sum_{i=1}^{\infty} \Pr[A_i].$$
)

Aus den Satz der totalen Wahrscheinlichkeit und (2.1) folgt

Satz 2.15. *(Satz von Bayes)* Die Ereignisse $A_1, \dots, A_n$ seien paarweise disjunkt. Ferner sei $B \subseteq A_1 \cup \dots \cup A_n$ ein Ereignis mit $\Pr[B] > 0$. Dann gilt für ein beliebiges $i = 1, \dots, n$

$$\Pr[A_i|B] = \frac{\Pr[A_i \cap B]}{\Pr[B]} = \frac{\Pr[B|A_i] \cdot \Pr[A_i]}{\sum_{j=1}^{n} \Pr[B|A_j] \cdot \Pr[A_j]}.$$

Analog gilt für paarweise disjunkte Ereignisse $A_1, A_2, \dots$ mit $B \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$, dass

$$\Pr[A_i|B] = \frac{\Pr[A_i \cap B]}{\Pr[B]} = \frac{\Pr[B|A_i] \cdot \Pr[A_i]}{\sum_{j=1}^{\infty} \Pr[B|A_j] \cdot \Pr[A_j]}.$$

Unabhängigkeit

Wir definieren Unabhängigkeit wie folgt:

Definition 2.18. Die Ereignisse A und B heissen *unabhängig*, wenn gilt

$$\Pr[A \cap B] = \Pr[A] \cdot \Pr[B].$$

Wenn $\Pr[B] \neq 0$ können wir aus der Def. folgendes folgern

$$\Pr[A \cap B] = \Pr[A] \cdot \Pr[B]$$

$$\Longleftrightarrow \quad \underbrace{\frac{\Pr[A \cap B]}{\Pr[B]}}_{} = \Pr[A] \qquad (\Pr[B] \neq 0)$$

$$\Longleftrightarrow \quad \underbrace{\Pr[A|B] = \Pr[A]}_{}$$

Diese Definition von Unabhängigkeit ist äquivalent ($\Leftrightarrow$) zu Def. 2.18, gdw. $\Pr[B] \neq 0$.

Bsp.: Wir werfen eine faire Münze 2-mal nacheinander.

$\Omega = \{(K,K),(K,Z),(Z,K),(Z,Z)\}$

$A :=$ "1. Wurf zeigt Kopf" $(= \{(K,Z),(K,K)\})$
$B :=$ "2. Wurf zeigt Kopf" $(= \{(K,K),(Z,K)\})$

$C :=$ "Die 2 Würfe sind verschieden" $(= \{(K,Z),(Z,K)\})$

$$\Pr[A \cap B] = \Pr[\{(K,K)\}] = \overbrace{\tfrac{1}{4}}^{\text{Laplace Raum}} = \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{1}{2} = \Pr[A] \cdot \Pr[B]$$
$$\Pr[A \cap C] = \tfrac{1}{4} = \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{1}{2} = \Pr[A] \cdot \Pr[C]$$
$$\Pr[B \cap C] = \tfrac{1}{4} = \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{1}{2} = \Pr[B] \cdot \Pr[C]$$

$\Longrightarrow$ A, B sind unabhängig. B, C sind unabhängig.
A, C sind unabhängig.

Aber: A, B, C sind nicht unabhängig.
Insbesondere gilt, dass wenn 2 eintreten, das 3. Ereignis nicht eintreten kann, da $A \cap B \cap C = \emptyset$.

$$\Longrightarrow \Pr[A \cap B \cap C] = 0 \neq \tfrac{1}{8} = \Pr[A] \cdot \Pr[B] \cdot \Pr[C]$$

paarweise Unabhängigkeit ist nicht ausreichend.

Definition 2.22. Die Ereignisse $A_1, \dots, A_n$ heissen *unabhängig*, wenn für alle Teilmengen $I \subseteq \{1, \dots, n\}$ mit $I = \{i_1, \dots, i_k\}$ gilt, dass

$$\Pr[A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}] = \Pr[A_{i_1}] \cdots \Pr[A_{i_k}]. \tag{2.2}$$

Eine unendliche Familie von Ereignissen A_i mit $i \in \mathbb{N}$ heisst unabhängig, wenn (2.2) für jede endliche Teilmenge $I \subseteq \mathbb{N}$ erfüllt ist.

Alle Teilmengen überprüfen / berechnen könnte man mit Bitstrings (wie bei Hamilton DP Woche 02 gezeigt)

Lemma 2.23. Die Ereignisse $A_1, \ldots, A_n$ sind genau dann unabhängig, wenn für alle $(s_1, \ldots, s_n) \in \{0,1\}^n$ gilt, dass

$$\Pr[A_1^{s_1} \cap \cdots \cap A_n^{s_n}] = \Pr[A_1^{s_1}] \cdots \Pr[A_n^{s_n}], \tag{2.3}$$

wobei $A_i^0 = \bar{A}_i$ und $A_i^1 = A_i$.

Nützliches Lemma

Lemma 2.24. Seien A, B und C unabhängige Ereignisse. Dann sind auch $A \cap B$ und C bzw. $A \cup B$ und C unabhängig.

Beweis (siehe Skript S. 107)

Bmk: disjunkt $\not\Rightarrow$ unabhängig
unabhängig $\not\Rightarrow$ disjunkt

Zufallsvariablen

Eine Zufallsvariable X ist eine Funktion

$$X: \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$$

Wir definieren (für diskrete W'keitsräume) den Wertebereich einer Zufallsvariable:

$$W_X = \{ z \in \mathbb{R} \mid \exists \omega \in \Omega \text{ mit } X(\omega) = z \} \quad (\hat{=} X(\Omega))$$

Bildraum der Abbildung

Wie bei den Beschreibungen der W'keitsräume haben sich auch bei den Zufallsvariablen einige Konventionen eingebürgert.

Meistens interessieren wir uns für Ereignisse wo die Zufallsvariable einen gewissen Wert annimmt.

z. Bsp.: $E_y = \underbrace{\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) = y\}}$ $\left(= X^{-1}(y)\right)$

Meistens schreiben wir aber '$X = y$'. (intuitiver)

$\Longrightarrow \Pr[E_y] = \Pr[X = y]$

Analog steht '$X \leq y$' für das Ereignis $D = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \leq y\}$

Mit dieser Notation können wir für jede Zufallsvariable zwei Funktionen definieren:

Dichte(-funktion)

$$f_X : \mathbb{R} \to [0,1], \quad x \mapsto P[X = x]$$

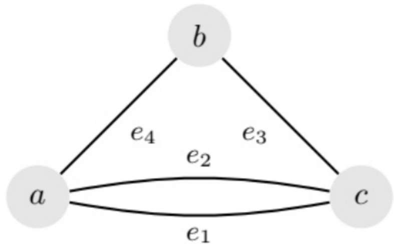
Verteilungs(-funktion)

$$F_X : \mathbb{R} \to [0,1], \quad x \mapsto \sum_{y \in W_X :\, y \leq x} \Pr[X = x]$$

Aufgabe 1 – *Zufälliges Kantenziehen*

In dieser Aufgabe sollen Sie einen effizienten Algorithmus entwickeln, um in einem Multigraphen zufällig und gleichverteilt eine Kante zu ziehen. Die grundlegende Idee ist, erst einen Knoten v zufällig auszuwählen, und anschliessend zufällig eine zu v inzidente Kante zu ziehen.

(a) Betrachten Sie den abgebildeten Multigraphen mit 4 Kanten. Zeigen Sie: Wenn Sie einen Knoten v *gleichverteilt* ziehen, und anschliessend gleichverteilt eine zu v inzidente Kante e ziehen, dann ist e *nicht* gleichverteilt.



X_u = "u im 1. Schritt" $(u \in V)$

Y_e = "e im 2. Schritt" $(e \in E)$

$$Pr[Y_e] = \sum_{v \in V} Pr[Y_e | X_v] \cdot Pr[X_v]$$

$$Pr[Y_{\{a,b\}}] = Pr[Y_e | X_a] \cdot Pr[X_a] + Pr[Y_e | X_b] \cdot Pr[X_b]$$

$$= \frac{1}{deg(a)} \cdot Pr[X_a] + \frac{1}{deg(b)} \cdot Pr[X_b]$$

$$Pr[Y_{e_1}] = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{9}$$

$$Pr[Y_{e_4}] = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{5}{18}$$

$\square$

(b) Sei $G = (V, E)$ ein Multigraph ohne Schleifen. Wir ziehen einen Knoten v mit Wahrscheinlichkeit *proportional zu seinem Grad*. (Formal: Wir betrachten den Wahrscheinlichkeitsraum $\Omega = V$ mit $\Pr[u] = \frac{\deg u}{2|E|}$ für alle $u \in V$.)

In einem zweiten Schritt ziehen wir gleichverteilt eine zu v inzidente Kante e. (Formal: Wir betrachten den Laplace-Raum $\Omega_v = \{e \in E \mid v \in e\}$.)

Zeigen Sie, dass in diesem zweistufigen Prozess jede Kante e mit Wahrscheinlichkeit $1/|E|$ gezogen wird.

$$\Pr\left[Y_{e=\{u,v\}}\right] = \Pr[Y_e \mid X_u] \cdot \Pr[X_u] + \Pr[Y_e \mid X_v] \cdot \Pr[X_v]$$

$$= \frac{1}{\deg(u)} \cdot \frac{\deg(u)}{2|E|} + \frac{1}{\deg(v)} \cdot \frac{\deg(v)}{2|E|}$$

$$= \underline{\underline{\frac{1}{|E|}}}$$

$\boxtimes$